IF5110 Teori Komputasi

Teori Kompleksitas
(Bagian 1)

Oleh: Rinaldi Munir

Sebuah persoalan dikatakan…

- Solvable, jika terdapat mesin Turing yang dapat menyelesaikannya.

  (atau *decidable* pada jenis persoalan keputusan)

- *Unsolvable*, jika tidak dapat dibuat mesin Turing untuk menyelesaikannya.

  (atau *undecidable* pada jenis persoalan keputusan)

- *Solvable problem* dapat dibagi menjadi dua kategori:

  1. *Tractable*
  2. *Intractable*

- Sebuah persoalan dikatakan *tractable* jika ia dapat diselesaikan dalam waktu yang wajar (*reasonable*).

- Sebuah persoalan dikatakan *intractable* jika ia tidak dapat diselesaikan dalam waktu yang wajar dengan bertambahkanya ukuran persoalan.

- Apa yang dimaksud dengan waktu yang wajar? Standar waktunya adalah *polynomial time*.
  - *Polynomial time*: $O(n^2)$, $O(n^3)$, $O(1)$, $O(n \lg n)$
  - *Not in polynomial time*: $O(2^n)$, $O(n^n)$, $O(n!)$ untuk n yang kecil

Kompleksitas Waktu

- Mesin Turing adalah model matematis sebuah komputer.
- Persoalan dipecahkan dengan menggunakan mesin Turing.
- Mesin Turing menerima input sepanjang n, lalu, dimulai dari status awal, melakukan gerakan (transisi) dari satu status ke status lainnya.
- Kebutuhan waktu (*running time*) yang diperlukan oleh Mesin Turing untuk menyelesaikan persoalan dengan input dengan panjang *n*, dinyatakan dengan $T(n)$, disebut kompleksitas waktu.

- Sebuah mesin Turing *M* dikatakan kompleksitas waktunya $T(n)$ bilamana jika *M* diberi input w yang panjangnya n maka *M* berhenti setelah melakukan gerakan sebanyak $T(n)$, tanpa memperhatikan apakah *M* berhenti pada status *accept* atau *reject*.

  Contoh: $T(n) = 5n + 2$

  $T(n) = 2n^2 + n + 6$

  $T(n) = 3^n + 10n^3$

Kelas P

- Sebuah persoalan keputusan dikatakan di dalam kelas P jika ia dapat diselesaikan dalam waktu polinomial oleh mesin Turing deterministik.

- Dengan kata lain, tedapat mesin Turing determinsitik *M* yang memecahkan persoalan dan berhenti pada status akhir dengan jumlah gerakan tidak lebih dari $T(n)$ bilamana mesin Turing *M* dberikan input sepanjang n.

- Karena persoalan berkoresponden dengan bahasa, maka kita katakan bahasa *L* termasuk dalam kelas *P* jika terdapat polinomial $T(n)$ sedemikian sehingga $L = L(M)$ untuk mesin Turing deterministik *M* yang kompleksitas waktunya $T(n)$

- Contoh persoalan dalam kelas P:
  1. Menentukan apakah sebuah *integer n* bilangan prima.
  2. Menentukan apakah sebuah *integer x* terdapat di dalam sebuah senarai (*list*).
  3. Menentukan apakah sebuah graf berbobot mengandung *minimum spaning tree* dengan bobot ≤ *W*?
  4. Menentukan apakah sebuah *integer n* merupakan elemen terbesar di dalam sebuah senarai?

- Persoalan di dalam kelas P disebut ***tractable*** sedangkan persoalan yang bukan di dalam P disebut ***intractable***.

Mesin Turing Deterministik vs. Mesin Turing non Determinisitik

- Pada mesin Turing deterministik, untuk satu status (p) dan satu simbol (X_i) di pita, hanya ada satu transisi ke status berikutnya (q).

  $\delta(p, X_i) = (q, Y, L)$

- Sebaliknya pada mesin Turing non-deterministik, untuk satu status (p) dan satu simbol (X_i) di pita, terdapat lebih dari satu transisi ke status berikutnya (q). Mesin Turing non-deterministik memilik kemampuan untuk memilih suatu transisi

  $\delta(p, X_i) = (q, W, L)$, $\delta(p, X_i) = (r, Y, L)$, $\delta(p, X_i) = (s, Z, R)$,

Kelas NP

- Sebuah persoalan keputusan dikatakan di dalam kelas NP jika ia dapat diselesaikan dalam waktu polinomial oleh mesin Turing non deterministik.

- Karena persoalan berkoresponden dengan bahasa, maka kita katakan bahasa *L* termasuk dalam kelas *NP* jika terdapat mesin Turing non deterministik dan kompleksitas waktu polinomial $T(n)$ sedemikian sehingga $L = L(M)$, dan bilamana M dberikan input sepanjang n, maka jumlah gerakannya tidak lebih dari $T(n)$.

- Mesin Turing non deterministik dikatakan memiliki kebutuhan waktu polinomial karena ia memiliki kemampuan untuk menerka kemungkinan solusi yang jumlahnya eksponensial dan memverifikasi setiap kemungkinan solusi tersebut dalam waktu polinomial.

- Setiap mesin Turing deterministik adalah mesin Turing non determinstik, tetapi mesin Turing deterministik tidak memiliki kemampuan memilih transisi.

- Oleh karena itu, $P \subseteq NP$.

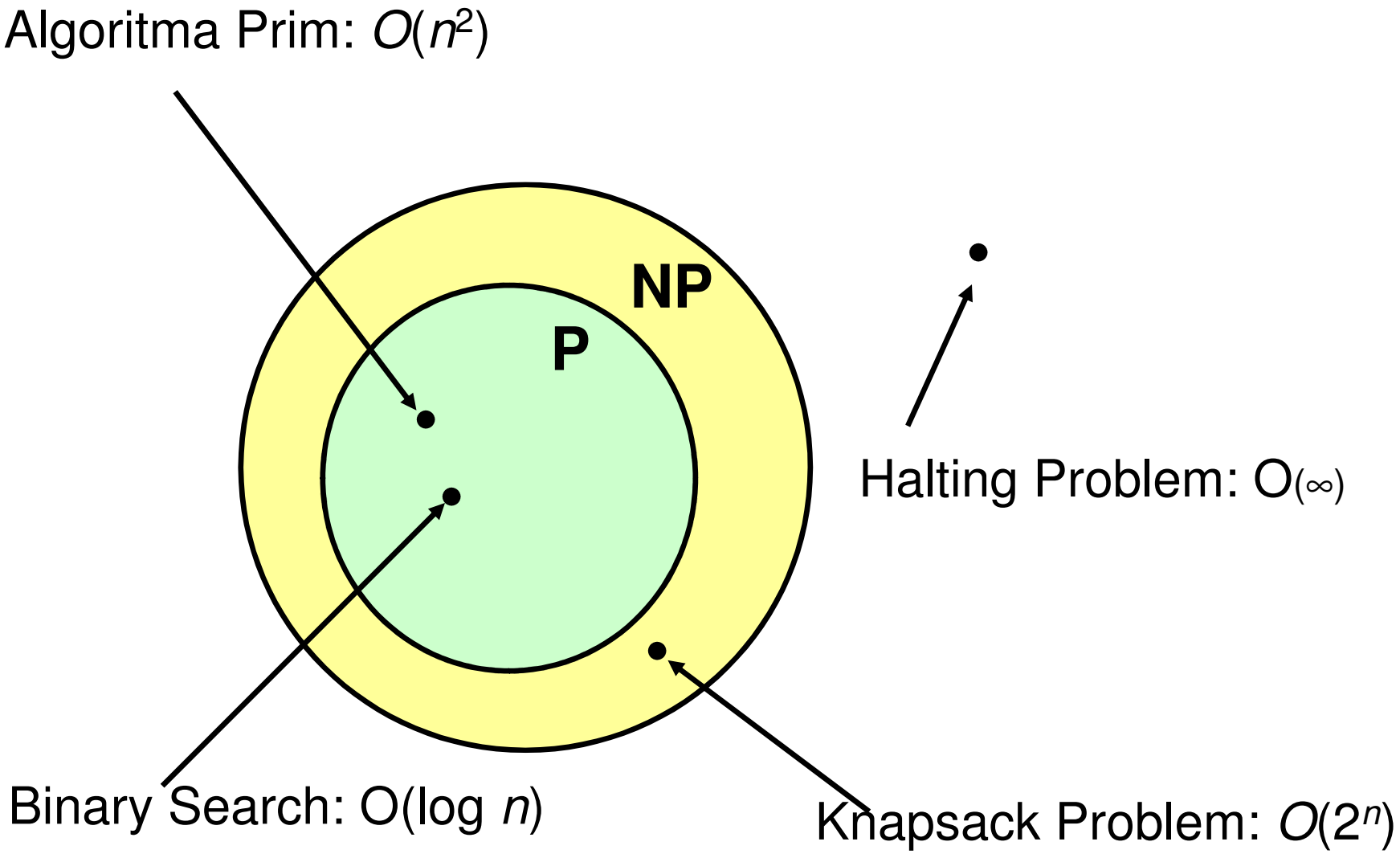
- Meskipun demikian, NP mengandung beberapa persoalan yang tidak termasuk ke dalam P.

Contoh persoalan dalam kelas NP:

1. *Travelling Salesperson Decision Problem* (*TSDP*):
   Menentukan apakah sebuah graf berbobot memiliki tur terpendek yang melalui setiap simpul tepat sekali dan kembali ke simpul awal dengan bobot $\leq M$?

2. *Integer Knapsack Decision Problem:* apakah dapat memasukkan objek-objek ke dalam *knapsack* namun tidak melebihi *W* tetapi total profitnya paling sedikit sebesar *P*.
3. *Graph-Colouring Decision Problem:* apakah terdapat pewarnaan graf yang menggunakan paling banyak *m* warna sedemikian sehingga dua simpul bertetangga memiliki warna berbeda?

Kelas Persoalan



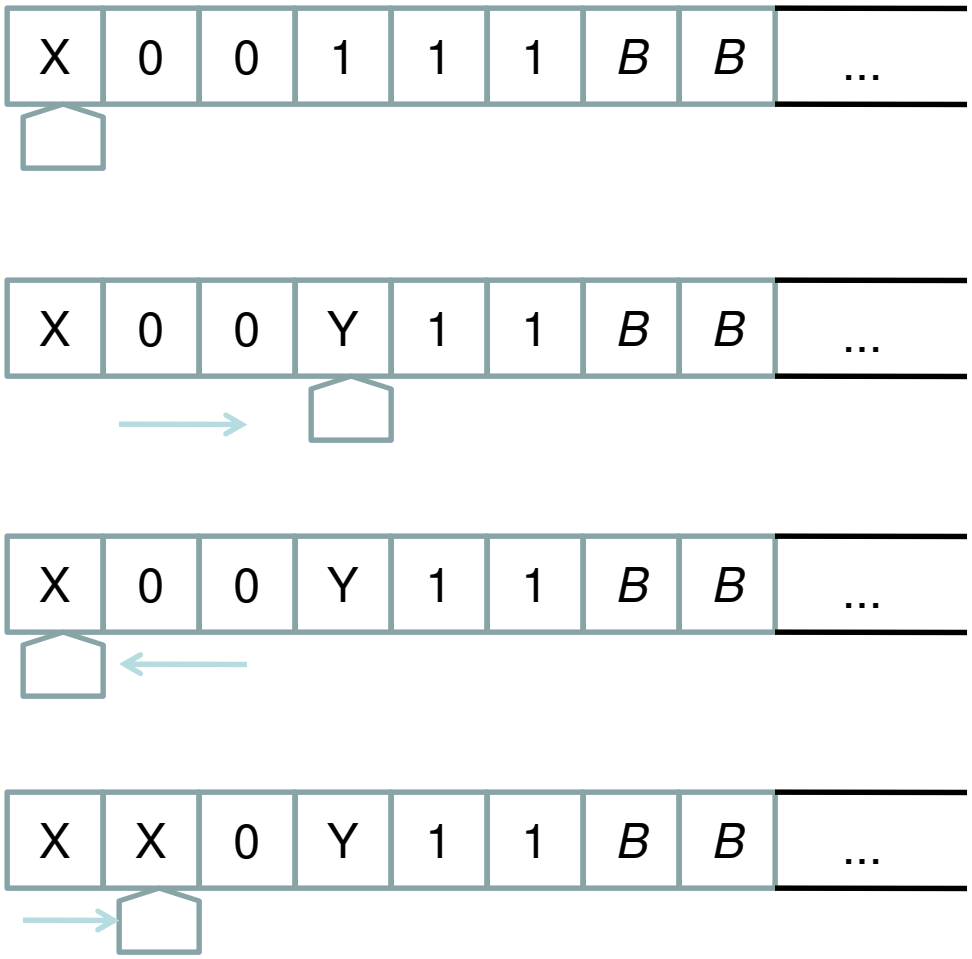
Contoh Persoalan P

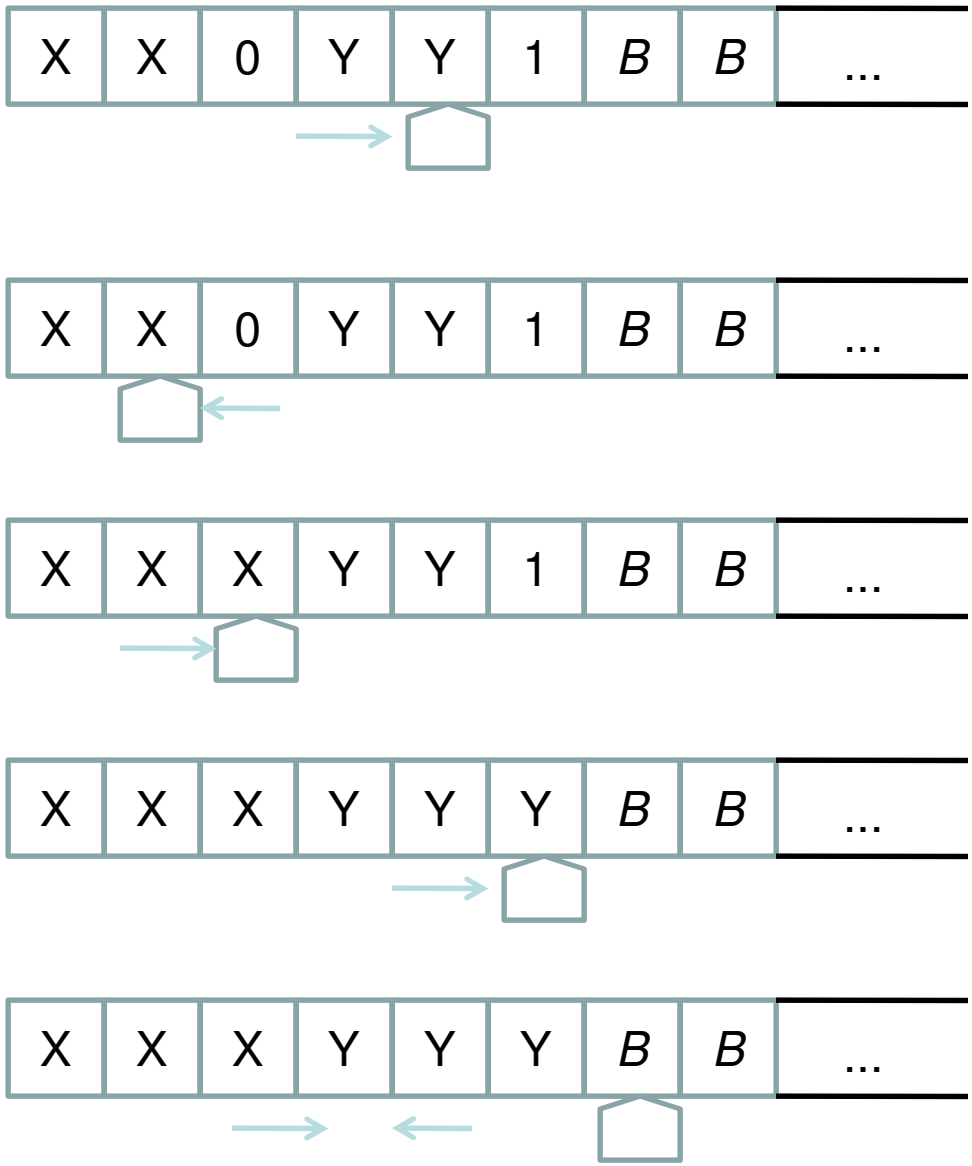
Mesin Turing *M* akan digunakan untuk mengenali bahasa $L = \{0^n1^n \mid n \geq 1\}$. Diberikan string w, apakah $w \in L$?

Algoritma:

1. Ganti simbol ‘0’ paling kiri dengan simbol ‘X’.
2. Gerakkan *head* ke kanan hingga dijumpai simbol ‘1’.
3. Ganti simbol ‘1’ paling kiri dengan simbol ‘Y’
4. Gerakkan *head* ke kiri hingga dijumpai simbol ‘X’
5. Geser *head* ke kanan (akan diperoleh ‘0’ paling kiri).
6. Kembali ke langkah 1.

Contoh: w = 000111





Kesimpulan: string ‘000111’ dikenali oleh *M*.

Analisis kompleksitas:

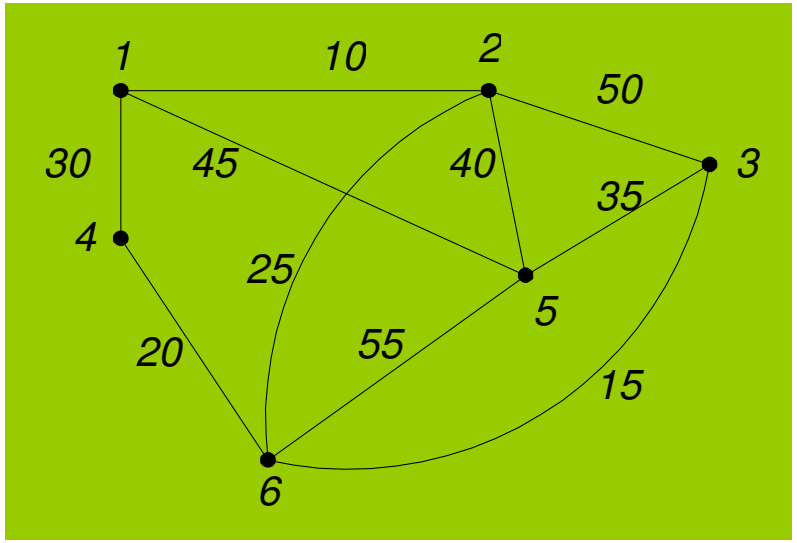
1. Ganti simbol '0' paling kiri dengan simbol 'X'. $\rightarrow O(1)$
2. Gerakkan *head* ke kanan hingga dijumpai simbol '1' $\rightarrow O(n)$
3. Ganti simbol '1' paling kiri dengan simbol 'Y' $\rightarrow O(1)$
4. Gerakkan *head* ke kiri hingga dijumpai simbol 'X' $\rightarrow O(n)$
5. Geser *head* ke kanan (akan diperoleh '0' paling kiri). $\rightarrow O(1)$
6. Kembali ke langkah 1. $\rightarrow$ paling banyak n/2 kali

Total kebutuhan waktu:

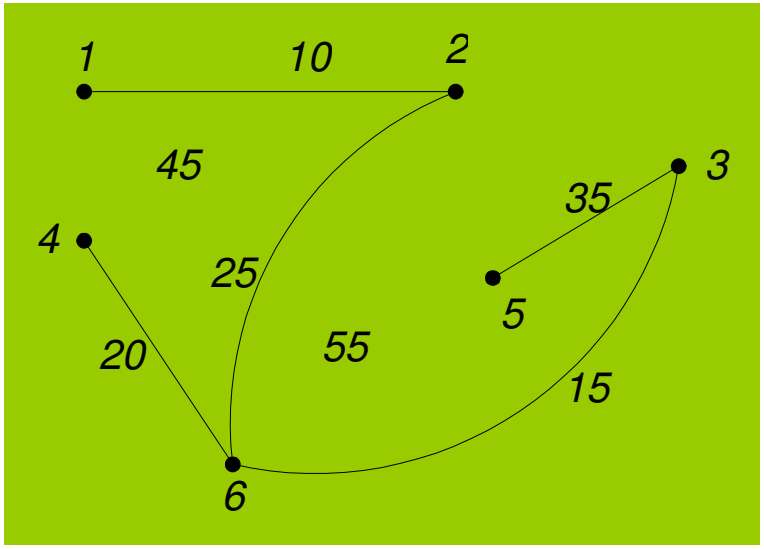
$n/2 \{ O(1) + O(n) + O(1) + On) + O(1) \} = n/2 \{O(n)\} = O(n^2)$

Algoritma Prim

- Algoritma untuk menentukan pohon merentang minimum (*minimum spanning tree*).
- Algoritma polinomial, karena kebutuhan waktunya $O(n^2)$.



(a) Graf *G = (V, E)*



(b) Pohon merentang minimum

Algoritma Prim

Langkah 1: ambil sisi dari graf G yang berbobot minimum, masukkan ke dalam T.

Langkah 2: pilih sisi (u, v) yang mempunyai bobot minimum dan bersisian dengan simpul di T, tetapi (u, v) tidak membentuk sirkuit di T. Masukkan (u, v) ke dalam T.

Langkah 3: ulangi langkah 2 sebanyak $n - 2$ kali.

```
procedure Prim(input G : graf, output T : pohon)
{ Membentuk pohon merentang minimum T dari graf terhubung-
berbobot G.
Masukan: graf-berbobot terhubung G = (V, E), dengan |V|= n
Keluaran: pohon rentang minimum T = (V, E')
}
Deklarasi
  i, p, q, u, v : integer

Algoritma
  Cari sisi (p,q) dari E yang berbobot terkecil
  T ← {(p,q)}
  for i←1 to n-2 do
    Pilih sisi (u,v) dari E yang bobotnya terkecil namun
    bersisian dengan simpul di T
    T ← T ∪ {(u,v)}
  endfor
```

Mencari sisi (p, q) dari E berbobot terkecil → O(n)

$T \leftarrow \{(p, q)\}$ → O(1)

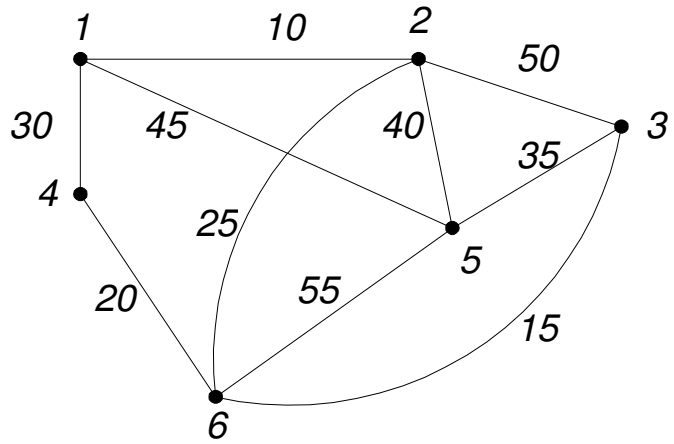
Pilih sisi (u, v) dari E berbobot terkecil namun bersisian dengan T → O(n)

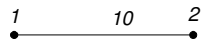
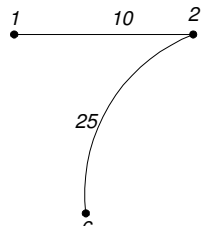
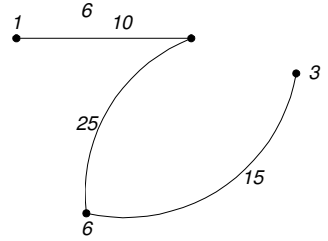
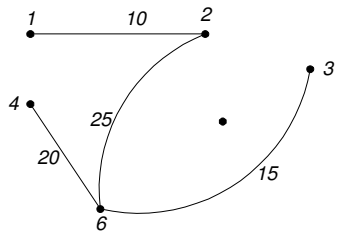
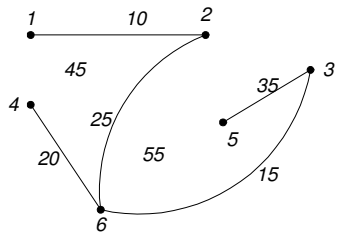
$T \leftarrow T \cup \{(u, v)\}$ → O(1)

Jumlah pengulangan loop → n – 2 kali

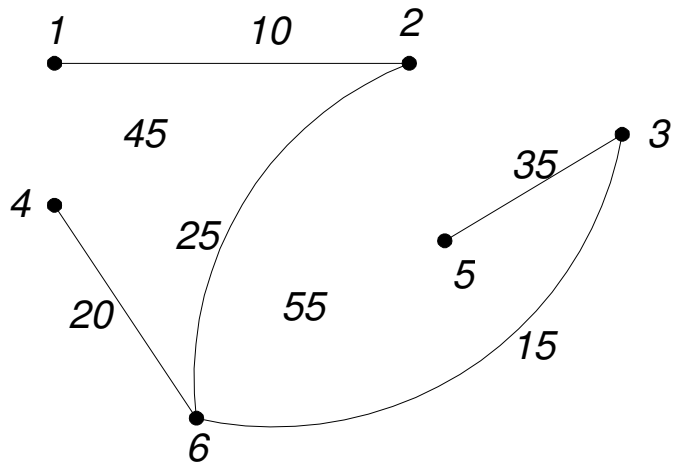
Total kebutuhan waktu → $O(n) + O(1) + (n - 2)\{ O(n) + O(1) \} = O(n) + O(n^2) = O(n^2)$

Contoh:



Langkah	Sisi	Bobot	Pohon rentang
1	(1, 2)	10	
2	(2, 6)	25	
3	(3, 6)	15	
4	(4, 6)	20	
5	(3, 5)	35	

Pohon merentang minimum yang dihasilkan:



Bobot = 10 + 25 + 15 + 20 + 35 = 105

- Algoritma MST lainnya: Algoritma Kruskal dengan kompleksitas $O(m \log m)$, m adalah jumlah sisi di dalam graf.

- Karena kita berhubungan dengan mesin Turing, maka kita memikirkan persoalan MST sebagai sebuah bahasa.

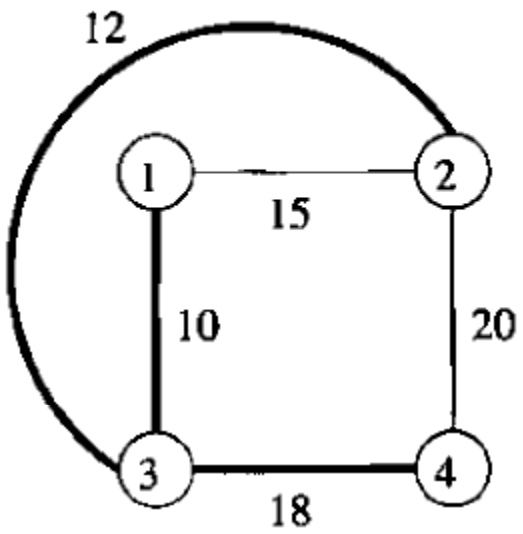
- Persolan keputusan → Bahasa

- Jika MST dijadikan persoalan keputusan, maka deskripsinya adalah sbb: Diberikan sebuah graf berbobot $G = (V, E)$ dan nilai W. Apakah G memiliki *spanning tree* dengan bobot $\leq W$?

Pengkodean *MST-decision problem* pada mesin Turing:

1. Simpul-simpul diberi nomor 1 sampai *m*.
2. Setiap integer dikodekan dalam biner.
3. Kode dimulai dengan m dalam biner dan bobot *W* dalam biner, dipisahkan dengan koma.
4. Jika terdapat sisi dari simpul *i* dan *j* dengan bobot *w*, letakkan (*i*, *j*, *w*) di dalam kode. Integer dikodekan dalam biner.
5. Kode yang dihasilkan merupakan input di pita untuk mesin Turing deterministik *M*.

- Contoh: Diberikan graf di bawah ini dan W = 40.



- Kode untuk *MST-decision problem* di atas adalah:

  100, 101000(1, 10, 1111)(1, 11, 1010)(10, 11, 1100)(10, 100, 10100)(11, 100, 10010)